

Ein Weg zur Generierung mehrkörperdynamischer Ersatzmodelle aus Finite-Elemente-Strukturen

Dr.-Ing. Klaus Kaltoven, Chemnitz *)

1. Problematik

Im ingenieurtechnischen Bereich hat sich zur Modellierung und Berechnung von statischem und dynamischem Verhalten mechanischer Strukturen die Finite Elemente-Methode (FEM) etabliert.

Seit 1982 [2] ist die FEM auch auf Strukturen anwendbar, die große Auslenkungen, d.h. insbesondere große Drehungen ausführen können. Diese bis dahin nur Mehrkörperprogrammen vorbehaltene Möglichkeit macht die FEM prinzipiell auch zur Simulation der Dynamik von Modellen mit großen Bewegungen geeignet. Die dadurch auftretenden geometrischen Nichtlinearitäten und die große Anzahl der Bewegungsgleichungen verhindern momentan noch den Einsatz handelsüblicher PC-Technik für solche Zwecke. Zur Simulation des „langzeitdynamischen“ Verhaltens werden deshalb vorwiegend Mehrkörperprogramme benutzt. Diese Programme verwenden Modelle, die aus starren Körpern bestehen, welche untereinander und zur Außenwelt über Kraft- oder Wegkopplungen verbunden sind. Zwar ist die Modellierungsvielfalt gegenüber der FEM erheblich eingeschränkt, dafür ist aber die Anzahl der Bewegungsgleichungen, die im Allgemeinen der Zahl der generalisierten Koordinaten (maximal sechs pro Körper) und der (geometrischen) Bindungen entspricht, recht übersichtlich. Dadurch sind Starrkörpermodelle zur Dynamik-Simulation gut geeignet. In vielen Fällen sind jedoch die „reinen“ Starrkörpermodelle zur realitätsnahen Simulation nicht mehr ausreichend. Gerade hoch beanspruchte Bauteile verformen sich unter Belastung (elastisch) und sollten somit nicht als Starrkörper modelliert werden.

In den letzten Jahren wurden große Anstrengungen unternommen, elastische Teilstrukturen in Mehrkörpermodelle einzubinden (z.B. [3], [4], [5], [6], [7]). Neben den für spezielle (Balken)-Strukturen verwendbaren sogenannten „Superelementen“ [3] zeichnen sich für allgemeine Modelle zwei gängige Methoden ab. Zum Einen existiert eine diskrete Methode [4], [5], [9], bei der die Elastizitätseigenschaften (und gegebenenfalls die Dämpfungseigenschaften) als Kraft-Deformations- (bzw. Kraft-Geschwindigkeits-) Beziehungen innerhalb der Teilstruktur im Mehrkörpermodell berücksichtigt werden. Die Trägheitseigenschaften der Teilstruktur werden jedoch nur sehr grob abgeschätzt, so dass diese Methode zu ungenauen Ergebnissen führte [8]. Eine andere Herangehensweise bietet die modale Methode, bei der zusätzliche modale Koordinaten in das Mehrkörper-Modell einbezogen werden müssen, um die elastischen Zusatzdeformationen zu beschreiben [6], [7]. Der Erfolg dieser Methode hängt im Wesentlichen von der richtigen Auswahl der Eigenformen (Randbedingungen) ab. Probleme gibt es ebenfalls bei der Anbindung der elastischen Teilstruktur an das Restmodell, weil die elastischen Auslenkungen der Verbindungsstellen nur näherungsweise berechnet werden können. Außerdem bereitet es im Gegensatz zur diskreten Methode, die durch Hintereinanderschalten mehrerer elastischer Substrukturen auch für Gesamtmodelle genutzt werden, bei denen große elastische Deformationen auftreten, Schwierigkeiten, mehr als eine solche deformierbare Teilstruktur zu berücksichtigen.

Die nun im Folgenden beschriebene Vorgehensweise kann als eine verbesserte diskrete Methode angesehen werden. Aus einer FE-Substruktur entsteht ein traditionelles Mehrkörper-Ersatzmodell mit verbesserten Masseparametern. Aus den ursprünglich verteilten Trägheits- und Elastizitätseigenschaften werden Modelle mit diskreten Starrkörpern und dazwischen angeordneten Kraft-Koppel-Elementen.

*) Diese Arbeit entstand während der Zeit als Mitarbeiter am Institut für Mechatronik e.V. an der TU Chemnitz im Rahmen des Forschungsprojektes MOTOSIM [1]

2. Modellaufbereitung

Voraussetzung zur Anwendung dieser Methode ist eine Aufbereitung des FE-Modelles. Dazu wird die Struktur, bestehend aus Knoten und Elementen, mit einer Substruktur-Reduktionsmethode, z.B. der statischen Kondensation nach Guyan /10/ in seiner Größe vermindert. Der Nutzer generiert eine Substruktur, indem er ausgewählte Knoten als sogenannte Hauptknoten (masternodes) deklariert. Das sind im Allgemeinen mindestens diejenigen Knoten, mit denen die Verbindung der Struktur an seine Umgebung (mit der Struktur verbundene Bauteile) hergestellt wird. Hinzu kommen Knoten an Massekonzentrationen und an solchen Stellen, an denen Kräfte, Verformungen, Spannungen etc. von Interesse sind.

An all diesen Stellen werden im Mehrkörper-Ersatzmodell die Starrkörper angeordnet. Bei der Anzahl der ausgewählten Hauptknoten ist ein Kompromiss zwischen Aufwand und Nutzen einzugehen. Eine hohe Anzahl von Knoten und damit Starrkörpern im Ersatzmodell erhöht zwar die Genauigkeit der Approximation, aber auch der Berechnungsaufwand steigt.

Eine Modellvalidierung kann zunächst durch Vergleiche der Eigenschwingungsverhalten von voller und reduzierter FE-Struktur erfolgen. Stimmen Eigenfrequenzen und Eigenschwingformen beider Modelle im interessierenden Frequenzbereich in einem akzeptablen Maß überein, kann die Wahl der Hauptknoten als zufriedenstellend betrachtet werden.

Im FE-Programm sind zu generieren :

1. Die Struktur-Steifigkeitsmatrix C_{FE} der ungefesselten Substruktur,
2. die Masseparameter Gesamtmasse, Schwerpunktlage, Trägheits- und Deviationsmomente bezüglich der Schwereachsen,
3. die Lage der Hauptknoten im Strukturkoordinatensystem oder im Schwerpunktkoordinatensystem,
4. die Eigenfrequenzen und dazugehörigen Eigenschwingformen der ungefesselten Substruktur, die das strukturdynamische Verhalten (im unteren Frequenzbereich) bestimmen.

3. Zielstellung

Die Kreation eines mehrkörperdynamischen Ersatzmodelles aus einer FE-Substruktur erfolgt mit dem Ziel, die starrkörperdynamischen, die elastischen und die strukturdynamischen Eigenschaften des Ersatzmodelles an die der ursprünglichen Struktur (möglichst genau) anzunähern.

Als Starrkörpereigenschaften werden die „globalen“ Masseparameter (Gesamtmasse, Schwerpunktlage, Trägheits- und Deviationsmomente bezüglich der Schwereachsen) angesehen. Stimmen diese in den Modellen überein, führen beide die (möglicherweise) großen (schwingungsfreien) Bewegungen gleich aus. Die Übereinstimmung der elastischen Eigenschaften ist 100%-ig gewährleistet, da die statische Kondensation für den linearen statischen Lastfall exakt ist, und weil die reduzierte FE-Steifigkeitsmatrix original in das Mehrkörperprogramm übernommen werden kann (z.B. NFORCE-statement in ADAMS /9/ oder KR3D-Anweisung in alaska /11/. Bei Übereinstimmung der strukturdynamischen Eigenschaften (Eigenfrequenzen und Eigenschwingformen im "strukturdynamischen" niederen Frequenzbereich) ist auch gleiches Antwortverhalten beider Modelle auf dynamische Erregung zu erwarten. Es besteht also die Aufgabe, den idealisierten Starrkörpern an den Knotenstellen (oder in deren Nähe) solche Masseparameter zuzuordnen, mit denen beide (starrkörper- und strukturdynamische) Forderungen erfüllt werden können. Dazu ist es nötig, die Diskrepanz zwischen schwerer (Alle Teilmassen sind in gleicher Weise an einer translativen Starrkörperbewegung beteiligt.) und schwingender Masse (Die Anteile der Teilmassen an einer Schwingbewegung des Modelles sind im Allgemeinen unterschiedlich.) soweit wie möglich zu kompensieren. Die Übereinstimmung der globalen Massen ist Ausdruck einer gleichen „äußeren“ Masseverteilung. Diese lässt sich jedoch durch verschiedene „innere“ Masseverteilungen erreichen. Gleiche Eigenschwingformen bei gleichen Eigenfrequenzen bedeuten darüber hinaus noch gleiche innere Masseverteilung.

4. Lösungsweg

4.1 Voraussetzungen

Den gesuchten Starrkörpern seien die Eigenschaften Masse und Massenträgheitsmomente um drei, durch den Schwerpunkt gehende, orthogonale Hauptachsen zugeordnet. Das Hauptachsensystem liege parallel zum Strukturkoordinatensystem der FE-Struktur, welches identisch ist mit dem Bezugskordinatensystem des Mehrkörpermodelles. Der Schwerpunkt jedes Teilkörpers befinde sich zunächst an der Position des jeweiligen Hauptknotens. Deviationsmomente der Einzelkörper werden nicht berücksichtigt
Ausgehend von den Ergebnissen der FE-Analyse kann eine Reihe von Bedingungsgleichungen aufgestellt werden, mit denen die o.g. Forderungen formuliert werden können. Das sind im Einzelnen die Forderungen nach Einhaltung der

- Größe der Gesamtmasse
- Lage des Gesamtschwerpunktes
- Größe der MTM der Gesamtstruktur
- Größe der Deviationsmomente der Gesamtstruktur
- Bedingungsgleichung für die Größe der Trägheitsmomente eines Körpers untereinander (Dreiecksungleichung)

Um auch Übereinstimmung des strukturdynamischen Verhalten zu erreichen, sind Forderungen an die Größe der modalen Massen zu richten. Die modale Masse ist ein Maß für die an einer konkreten Eigenschwingform beteiligten kinetischen Energie der Struktur /12/.

Zur Lösung ist eine mathematische Optimierung durchzuführen, mit dem Ziel, alle Forderungen (Restriktionen) möglichst gut zu erfüllen, um somit (annähernd) gleiche relevante mechanische Eigenschaften von FE-Struktur und Ersatzmodell zu erreichen.

4.2 Mathematische Formulierung

Das Problem lässt sich als lineares Optimierungsproblem unter linearen Nebenbedingungen formulieren. Es wird das Minimum der linearen Zielfunktion

$$F(x) = c^T * x \Rightarrow \min. \quad (1)$$

unter den linearen Nebenbedingungen

$$b_l = \frac{b_{l1}}{b_{l2}} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} * x \leq \frac{b_{u1}}{b_{u2}} = b_u \quad (2)$$

gesucht.

Hierbei bedeuten:	c	...	Vektor der Wichtungsfaktoren, (z.B. $c = \{1, 1, 1 \dots, 1\}^T$),
	x	...	Lösungsvektor
	b_l	...	untere Grenze
	b_u	...	obere Grenze
	E	...	Einheitsmatrix
	A	...	Koeffizientenmatrix.

Die Elemente von x sind die Massen und die Massenträgheitsmomente der Einzelkörper. Der Lösungsvektor hat die Gestalt

$$x = \{m_1, J_1^{xx}, J_1^{yy}, J_1^{zz}, \dots, m_k, J_k^{xx}, J_k^{yy}, J_k^{zz}, \dots, m_n, J_n^{xx}, J_n^{yy}, J_n^{zz}\}^T, \quad (3)$$

mit	m	...	Masse des Einzelkörpers
	J^{xx}	...	MTM des Einzelkörpers um körperfeste x-Achse
	J^{yy}	...	MTM des Einzelkörpers um körperfeste y-Achse
	J^{zz}	...	MTM des Einzelkörpers um körperfeste z-Achse

Die Dimension des Problems (Anzahl der Unbekannten) beträgt $4 \cdot n$, ($n \dots$ Anzahl der Starrkörper).

Die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} setzt sich aus einem statischen und einem dynamischen Bestandteil zusammen. Der statische Anteil kann weiterhin in einen massegeometrischen und einen geometrischen Teil unterteilt werden; der massegeometrische Teil \mathbf{A}_m enthält die Anteile des Einzelkörpers an den globalen Masseparametern, der geometrische Teil \mathbf{A}_g resultiert aus den Bedingungen für die Größe der Massenträgheitsmomente eines Körpers untereinander (Dreiecksungleichung). Der dynamische Teil \mathbf{A}_d repräsentiert die Gesetzmäßigkeiten des strukturdynamischen Verhaltens (modale Massen).

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} \mathbf{A}_m \\ \mathbf{A}_g \\ \mathbf{A}_d \end{matrix} \quad (4)$$

Die Teilmatrix \mathbf{A}_m ergibt sich aus den Anteilen aller Einzelkörper an den globalen Masseparametern Gesamtmasse, Schwerpunktlage und Trägheits- bzw. Deviationsmomente bezüglich der Schwereachsen zu:

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1^x & 0 & 0 & 0 & \dots & s_k^x & 0 & 0 & 0 & \dots & s_n^x & 0 & 0 & 0 \\ s_1^y & 0 & 0 & 0 & \dots & s_k^y & 0 & 0 & 0 & \dots & s_n^y & 0 & 0 & 0 \\ s_1^z & 0 & 0 & 0 & \dots & s_k^z & 0 & 0 & 0 & \dots & s_n^z & 0 & 0 & 0 \\ s_1^{y^2} + s_1^{z^2} & 1 & 0 & 0 & \dots & s_k^{y^2} + s_k^{z^2} & 1 & 0 & 0 & \dots & s_n^{y^2} + s_n^{z^2} & 1 & 0 & 0 \\ s_1^{z^2} + s_1^{x^2} & 0 & 1 & 0 & \dots & s_k^{z^2} + s_k^{x^2} & 0 & 1 & 0 & \dots & s_n^{z^2} + s_n^{x^2} & 0 & 1 & 0 \\ s_1^{x^2} + s_1^{y^2} & 0 & 0 & 1 & \dots & s_k^{x^2} + s_k^{y^2} & 0 & 0 & 1 & \dots & s_n^{x^2} + s_n^{y^2} & 0 & 0 & 1 \\ -s_1^y s_1^z & 0 & 0 & 0 & \dots & -s_k^y s_k^z & 0 & 0 & 0 & \dots & -s_n^y s_n^z & 0 & 0 & 0 \\ -s_1^z s_1^x & 0 & 0 & 0 & \dots & -s_k^z s_k^x & 0 & 0 & 0 & \dots & -s_n^z s_n^x & 0 & 0 & 0 \\ -s_1^x s_1^y & 0 & 0 & 0 & \dots & -s_k^x s_k^y & 0 & 0 & 0 & \dots & -s_n^x s_n^y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

mit $s_k^x = x_k - x_S \dots$ x-Koordinate des k-ten Einzelkörpers bezüglich des Gesamtschwerpunktes
 $s_k^y = y_k - y_S \dots$ y-Koordinate des k-ten Einzelkörpers bezüglich des Gesamtschwerpunktes
 $s_k^z = z_k - z_S \dots$ z-Koordinate des k-ten Einzelkörpers bezüglich des Gesamtschwerpunktes.

Die Anzahl der Zeilen von \mathbf{A}_m ist 10.

Die zusätzlichen Bedingungen an die Größen der Massenträgheitsmomente jedes Einzelkörpers lauten :

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{J}_k^{xx} + \mathbf{J}_k^{yy} \geq \mathbf{J}_k^{zz} \\ \mathbf{J}_k^{xx} + \mathbf{J}_k^{zz} \geq \mathbf{J}_k^{yy} \\ \mathbf{J}_k^{yy} + \mathbf{J}_k^{zz} \geq \mathbf{J}_k^{xx} \end{matrix} \right\} \quad (6)$$

und werden in der Teilmatrix \mathbf{A}_g so formuliert:

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Die Teilmatrix \mathbf{A}_g hat $3 \cdot n$ Zeilen .

Im dynamischen Teil \mathbf{A}_d wird das Eigenschwingungsverhalten der ungefesselten Struktur im unteren Frequenzbereich berücksichtigt. Dazu werden die „modalen“ Beziehungen

$$\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{M}_{FE} \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} \frac{1}{\omega_i^2} (\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{C}_{FE} \cdot \mathbf{v}_j) & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (8)$$

mit ω_i ... i-te Eigenkreisfrequenz
 \mathbf{v}_i ... i-te Eigenschwingform
 \mathbf{C}_{FE} ... Struktur-Steifigkeitsmatrix
 \mathbf{M}_{FE} ... Struktur-Massenmatrix

als Ausdruck der Rayleigh-Quotienten bzw. der Orthogonalität der Eigenschwingformen benutzt..

Nun ersetzt man die Struktur-Massenmatrix \mathbf{M}_{FE} durch die Massenmatrix des diskreten Modelles \mathbf{M} , und es ergeben sich weitere Restriktionsgleichungen für die Masseparameter, denn die Beziehung (8) lässt sich in die Form (2) umwandeln, weil die Masseparameter in (8) linear auftreten.. Die Anzahl der Gleichungen beträgt $(m^2+m)/2$, wenn m die Anzahl der berücksichtigten Eigenfrequenzen ist.

\mathbf{M} ergibt sich aus den Massenmatrizen der Einzelkörper, \mathbf{M}_k

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} m_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & m_k & 0 & 0 & 0 \\ & & & J_k^{xx} & 0 & 0 \\ & & & & J_k^{yy} & 0 \\ \text{symmetrisch} & & & & & J_k^{zz} \end{bmatrix} \quad (9)$$

durch Aneinanderreihen der M_k ($k= 1 \dots n$) entlang der Hauptdiagonalen:

$$M = \text{diag} \{ M_1, \dots M_k, \dots M_n \}. \quad (10)$$

Aus jeder der Beziehungen (8) entsteht eine Zeile der Teilkoeffizientenmatrix A_d . Sind die Eigenschwingformen v_i so normiert, dass gilt

$$v_i^T \cdot M_{FE} \cdot v_i = 1, \quad (11)$$

vereinfacht sich Gl.(8).

Legt man die Reihenfolge der entstehenden (Un)gleichungen so fest, dass zuerst in aufsteigender Reihenfolge die ($i = j$) - Beziehungen (Rayleigh-Quotienten) und danach die ($i \neq j$) - Beziehungen (Orthogonalität der Eigenschwingformen) in der Reihenfolge : "Kleinster i - Index zuerst (für $i < j$) " auftreten,

(Beispiel: $m=4 \Rightarrow 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4$)

ergibt sich die dynamische Koeffizientenmatrix A_d zu :

	1	...	4	...	4i+1	...	4(i+1)	...	4n-3	...	4n
1	$(v_{1,1}^2 + v_{1,2}^2 + v_{1,3}^2)$...	$v_{1,6}^2$...	$(v_{1,6i+1}^2 + v_{1,6i+2}^2 + v_{1,6i+3}^2)$...	$v_{1,6(i+1)}^2$...	$(v_{1,6n-5}^2 + v_{1,6n-4}^2 + v_{1,6n-3}^2)$...	$v_{1,6n}^2$

m	$(v_{m,1}^2 + v_{m,2}^2 + v_{m,3}^2)$...	$v_{m,6}^2$...	$(v_{m,6i+1}^2 + v_{m,6i+2}^2 + v_{m,6i+3}^2)$...	$v_{m,6(i+1)}^2$...	$(v_{m,6n-5}^2 + v_{m,6n-4}^2 + v_{m,6n-3}^2)$...	$v_{m,6n}^2$
m+1	$(v_{1,1}v_{2,1} + v_{1,2}v_{2,2} + v_{1,3}v_{2,3})$...	$v_{1,6}v_{2,6}$...	$(v_{1,6i+1}v_{2,6i+1} + v_{1,6i+2}v_{2,6i+2} + v_{1,6i+3}v_{2,6i+3})$...	$v_{1,6(i+1)}v_{2,6(i+1)}$...	$(v_{1,6n-5}v_{2,6n-5} + v_{1,6n-4}v_{2,6n-4} + v_{1,6n-3}v_{2,6n-3})$...	$v_{1,6n}v_{2,6n}$

$(m^2+m)/2$	$(v_{m-1,1}v_{m,1} + v_{m-1,2}v_{m,2} + v_{m-1,3}v_{m,3})$...	$v_{m-1,6}v_{m,6}$...	$(v_{m-1,6i+1}v_{m,6i+1} + v_{m-1,6i+2}v_{m,6i+2} + v_{m-1,6i+3}v_{m,6i+3})$...	$v_{m-1,6(i+1)}v_{m,6(i+1)}$...	$(v_{m-1,6n-5}v_{m,6n-5} + v_{m-1,6n-4}v_{m,6n-4} + v_{m-1,6n-3}v_{m,6n-3})$...	$v_{m-1,6n}v_{m,6n}$

(12)

$k = 1$	$k = i+1$	$k = n$
---------	-----------	---------

Die Grenzen des Ungleichungssystems (Gl.2), b_l und b_{ul} engen die Lösungsvielfalt ein. Für die Elemente der Teilvektoren b_{ll} und b_{ul} (vgl. Gl. 2) wird zunächst vorausgesetzt, dass Massen und MTM der Einzelkörper einerseits nicht negativ und andererseits nicht größer als die jeweiligen globalen Parameter sein dürfen. Für die Teilvektoren b_{l2} und b_{u2} gilt Folgendes:

Bei einer exakten Erfüllung der Forderungen an die Masseparameter würde gelten:

$$b_{l2} = b_{u2} = b_2 = \{M, S^x, S^y, S^z, J^{xx}, J^{yy}, J^{zz}, J^{xy}, J^{xz}, J^{yz}, 0, \dots, 0, \mu_1, \dots, \mu_i, \dots, \mu_m, 0, \dots, 0\}^T \quad (13)$$

mit	M	...	Gesamtmasse,
	$S^x = 0$...	statisches Moment der Gesamtstruktur um x - Schwereachse,
	$S^y = 0$...	statisches Moment der Gesamtstruktur um y - Schwereachse,
	$S^z = 0$...	statisches Moment der Gesamtstruktur um z - Schwereachse,
	J^{xx}	...	Massenträgheitsmoment der Gesamtstruktur um x - Schwereachse,
	J^{yy}	...	Massenträgheitsmoment der Gesamtstruktur um y - Schwereachse,
	J^{zz}	...	Massenträgheitsmoment der Gesamtstruktur um z - Schwereachse,
	J^{xy}, J^{xz}, J^{yz}	...	Deviationsmomente der Gesamtstruktur um die Schwereachsen,
	μ_i	...	i-te modale Masse ($\mu_i = \frac{1}{\omega_i^2} (v_i^T \cdot C_{FE} \cdot v_i)$) .

Da die exakte Erfüllung aller Forderungen im Allgemeinen nicht möglich ist, werden im Laufe einer iterativen Lösung die beiden Grenzvektoren b_{l2} und b_{u2} mit einer Toleranz ϵ modifiziert

$$\left. \begin{aligned} b_{l2} &= (1 - \epsilon) * b_2 - \epsilon \\ b_{u2} &= (1 + \epsilon) * b_2 + \epsilon , \end{aligned} \right\} (14)$$

die am Beginn der Berechnung groß ist (z.B.: $\epsilon = 1$) und , wenn Gl.(2) erfüllt werden kann, so lange verkleinert wird, bis die geforderte Genauigkeit erreicht ist. Damit wird aus der eigentlich multikriteriellen Optimierung eine Minimumsuche nach einem Optimierungsparameter ϵ . Die Suche wird beendet, wenn ϵ einen geforderten kleinen Wert erreicht hat.

4.3 Äußere Optimierung

4.3.1. Variation der Schwerpunktlagen

Durch ungünstige Lokalisation oder zu geringe Anzahl der Masterknoten oder durch sehr hohe Genauigkeitsanforderungen ($\epsilon \rightarrow 0$) kann es vorkommen, dass der geforderte ϵ -Wert im Laufe der iterativen Lösung nicht erreicht wird. Der Algorithmus liefert dann die Ursache für den vorzeitigen Abbruch. Liegt diese z.B. darin, dass die Schwerpunktlage, die Massenträgheitsmomente oder die Deviationsmomente nicht erfüllt werden können, ist die Schwerpunktlage der Einzelkörper gegenüber den Knotenkoordinaten zu verändern.

Daraus resultiert eine veränderte Massenmatrix des Ersatzmodelles , denn der Anteil des k-ten Einzelkörpers M_k an der Gesamt-Massenmatrix M lautet nunmehr:

$$M_k = \begin{bmatrix} m_k & 0 & 0 & 0 & m_k * \bar{z}_k & -m_k * \bar{y}_k \\ & m_k & 0 & -m_k * \bar{z}_k & 0 & m_k * \bar{x}_k \\ & & m_k & m_k * \bar{y}_k & -m_k * \bar{x}_k & 0 \\ & & & J_k^{xx} + m_k * (\bar{y}_k^2 + \bar{z}_k^2) & -m_k * \bar{x}_k * \bar{y}_k & -m_k * \bar{x}_k * \bar{z}_k \\ & & & & J_k^{yy} + m_k * (\bar{z}_k^2 + \bar{x}_k^2) & -m_k * \bar{y}_k * \bar{z}_k \\ & & & & & J_k^{zz} + m_k * (\bar{x}_k^2 + \bar{y}_k^2) \end{bmatrix} \quad (15)$$

symmetrisch

mit \bar{x}_k ... Verschiebung des Schwerpunktes des k-ten Einzelkörpers gegenüber dem k-ten Knoten in x-Richtung
 \bar{y}_k ... Verschiebung des Schwerpunktes des k-ten Einzelkörpers gegenüber dem k-ten Knoten in y-Richtung
 \bar{z}_k ... Verschiebung des Schwerpunktes des k-ten Einzelkörpers gegenüber dem k-ten Knoten in z-Richtung.

Die Korrektur der einzelnen Schwerpunktlagen erfolgt in folgender Art und Weise :

Ist z.B. das statische Moment S_x für den Abbruch verantwortlich, werden bei $S_x < 0$ (>0) die Schwerpunktkoordinaten der Einzelstarrkörper in positive (negative) x -Richtung verschoben, usw. Liegt die Abbruchursache z.B. in einem zu großen Massenträgheitsmoment J^{yy} , dann sind die x - und z - Abstände aller Starrkörper zum Gesamtschwerpunkt zu verringern, die Einzelschwerpunkte praktisch nach "innen" zu verschieben. Analog ist die Vorgehensweise bei der Variation der Deviationsmomente.

Nach einer solchen Schwerpunktverschiebung ist die Teilkoeffizientenmatrix A_m (Gl.5) neu aufzubauen, jedoch mit den aktualisierten Schwerpunktkoordinaten x_k, y_k, z_k (vgl.Gl. 5). Den Elementen der Teilmatrix A_d (Gl. 12) sind durch die Entdiagonalisierung der M_k (Gl. 15) folgende Zusatzterme $a_d^{r,s}$ zu addieren:

$$\begin{aligned}
 a_d^{r,s} = & v_{j,6k-5} * (z_k * v_{i,6k-1} - y_k * v_{i,6k}) + v_{j,6k-4} * (-z_k * v_{i,6k-2} + x_k * v_{i,6k}) + v_{j,6k-3} * (x_k * v_{i,6k-2} - y_k * v_{i,6k-1}) + \\
 & + v_{j,6k-2} * \left[-z_k * v_{i,6k-4} + y_k * v_{i,6k-3} + (y_k^2 + z_k^2) * v_{i,6k-2} \quad - x_k * y_k * v_{i,6k-1} \quad - x_k * z_k * v_{i,6k} \right] + \\
 & + v_{j,6k-1} * \left[z_k * v_{i,6k-5} - x_k * v_{i,6k-3} \quad - x_k * y_k * v_{i,6k-2} + (z_k^2 + x_k^2) * v_{i,6k-1} \quad - y_k * z_k * v_{i,6k} \right] + \\
 & + v_{j,6k} * \left[-y_k * v_{i,6k-5} + x_k * v_{i,6k-4} \quad - x_k * z_k * v_{i,6k-2} \quad - y_k * z_k * v_{i,6k-1} + (x_k^2 + y_k^2) * v_{i,6k} \right],
 \end{aligned} \tag{16}$$

mit $k \dots$ Nr. des Einzelkörpers $(1 \leq k \leq n)$,
 $i, j \dots$ Nr. der Eigenschwingformen $(1 \leq i, j \leq m)$,
 $s \dots$ Spaltenindex $(s = 4k-3)$,

$$r \dots \text{Zeilenindex} \quad r = \begin{cases} (i + j) / 2 & \text{für } i = j \\ m + m(i-1) - (i^2+i)/2 + j & \text{für } j > i. \end{cases}$$

Mit diesen veränderten Koeffizientenmatrizen wird nun eine erneute "innere" Optimierung (d.h. Suche nach dem minimalen ε) durchgeführt. Diese Prozedur wird so lange wiederholt, bis die geforderte ε -Toleranz erreicht wird.

4.3.2 Variation der modalen Massen

Ist nicht eine der globalen Massen, sondern eine der modalen Massen (Gl. 11) die Ursache für den Abbruch der Optimierung, wird folgende Vorgehensweise zur Ergebnisverbesserung angewandt:

Von der betreffenden modalen Masse μ_j ($1, \dots, j, \dots, m$) wird dasjenige Hauptdiagonalelement m_{kk} der Massenmatrix M gesucht, das den größten Anteil an ihr hat:

$$\mu^+ = \max (v_{jk}^2 * m_{kk}) \quad , \quad (k = 1 \dots 6n), \tag{17}$$

$v_{jk} \dots$ k-tes Element der j-ten Schwingform.

Diesem k-ten Hauptdiagonalelement kann einer der gesuchten Masseparameter (Gl. 3) zugeordnet werden. Ist die j-te modale Masse zu klein ($\mu^+ < 1$) muss dieser Masseparameter vergrößert werden, ist sie zu groß ($\mu^+ > 1$), ist er zu verkleinern. Dies wird erreicht, indem bei zu kleiner modalen Masse die untere Grenze b_{ll} (siehe Gl. 2) erhöht, bei zu großer modalen Masse das betreffende Element der oberen Grenze b_{ul} auf das erforderliche Maß verringert wird.

4.4 Eliminieren von Eigenfrequenzen

Die mit Hilfe der bisher erläuterten Vorgehensweise generierten Ersatzmodelle besitzen mitunter das Handicap, dass auch bei guter Übereinstimmung von globalen und modalen Massen im untersuchten Eigenfrequenzbereich zusätzliche (in der FE-Analyse nicht auftretende) Eigenfrequenzen existieren. Ist das der Fall, sind diese mit Hilfe des folgenden Algorithmus ' zu eliminieren, d.h. in einen nicht interessierenden Frequenzbereich zu verschieben.

Nach Abschluss der Optimierungsrechnung ist das Eigenwertproblem

$$(C_{FE} - \omega_i^2 * M) u_i = 0 \quad , \quad (18)$$

mit

C_{FE}	... Steifigkeitsmatrix der FE-Struktur
ω_i	... (untere) i-te Eigenkreisfrequenz des Ersatzmodelles
M	... Massenmatrix des Ersatzmodelles
u_i	... Eigenschwingform der i-ten Eigenfrequenz des Ersatzmodelles

zu lösen.

Nach der Normierung der Eigenschwingform u_i auf

$$u_i^T * E * u_i = 1 \quad (19)$$

(E ... Einheitsmatrix),

ist diese mit den auf gleiche Weise normierten Eigenschwingformen v_j ($j=1 \dots m$) der FE-Struktur zu vergleichen.

Mit dem Koeffizienten

$$mac_{ij} = | u_i^T * v_j | \quad (20)$$

ist ein Maß zur Identifikation der Schwingformen gegeben. Für den Fall

$$mac_{ij} \geq 0.7 \dots 1.0 \quad (21)$$

kann die j-te Schwingform der FE-Struktur der i-ten Schwingform des Ersatzmodelles zugeordnet werden.

Sind für ein konkretes i alle $mac_{ij} < 0.7$ ($j=1 \dots m$), ist die i-te Eigenschwingform zu eliminieren.

Dazu wird zunächst - ähnlich wie in Abschnitt 4.2.2 - ermittelt, welche Elemente der Massenmatrix des Ersatzmodelles den bedeutendsten Anteil an der jeweiligen modalen Masse

$$\mu_i = u_i^T * M * u_i \quad (22)$$

haben.

Mit

$$m^+ = \max (u_{ik}^2 * m_{kk}) \quad , \quad k = 1 \dots 6n \quad (23)$$

ist die Hauptursache für die „unerwünschte“ Eigenfrequenz gefunden. Dem Massenmatrixelement m_{kk} kann ein konkreter Masseparameter des Ersatzmodelles zugeordnet werden. Wird dieser Masseparameter verringert, kann die betreffende Frequenz nach "oben" verschoben werden.

Die (zur Eliminierung aus dem interessierenden Frequenzbereich) notwendige Änderung des Masseparameters Δm_i kann mit

$$\Delta m_i = (1.1 \dots 1.2) * m_i * \left(\frac{\omega_i^2}{\omega_m^2} - 1 \right) \quad , \quad (24)$$

mit

ω_m	...	höchste interessierende Eigenkreisfrequenz
ω_i	...	zu eliminierende Eigenkreisfrequenz

abgeschätzt werden.

Diese Vorgehensweise wird auf jede zu eliminierende Eigenfrequenz angewendet, und anschließend werden die neu abgeschätzten Masseparameter

$$m_{i \text{ neu}} = m_i + \Delta m_i \quad (25)$$

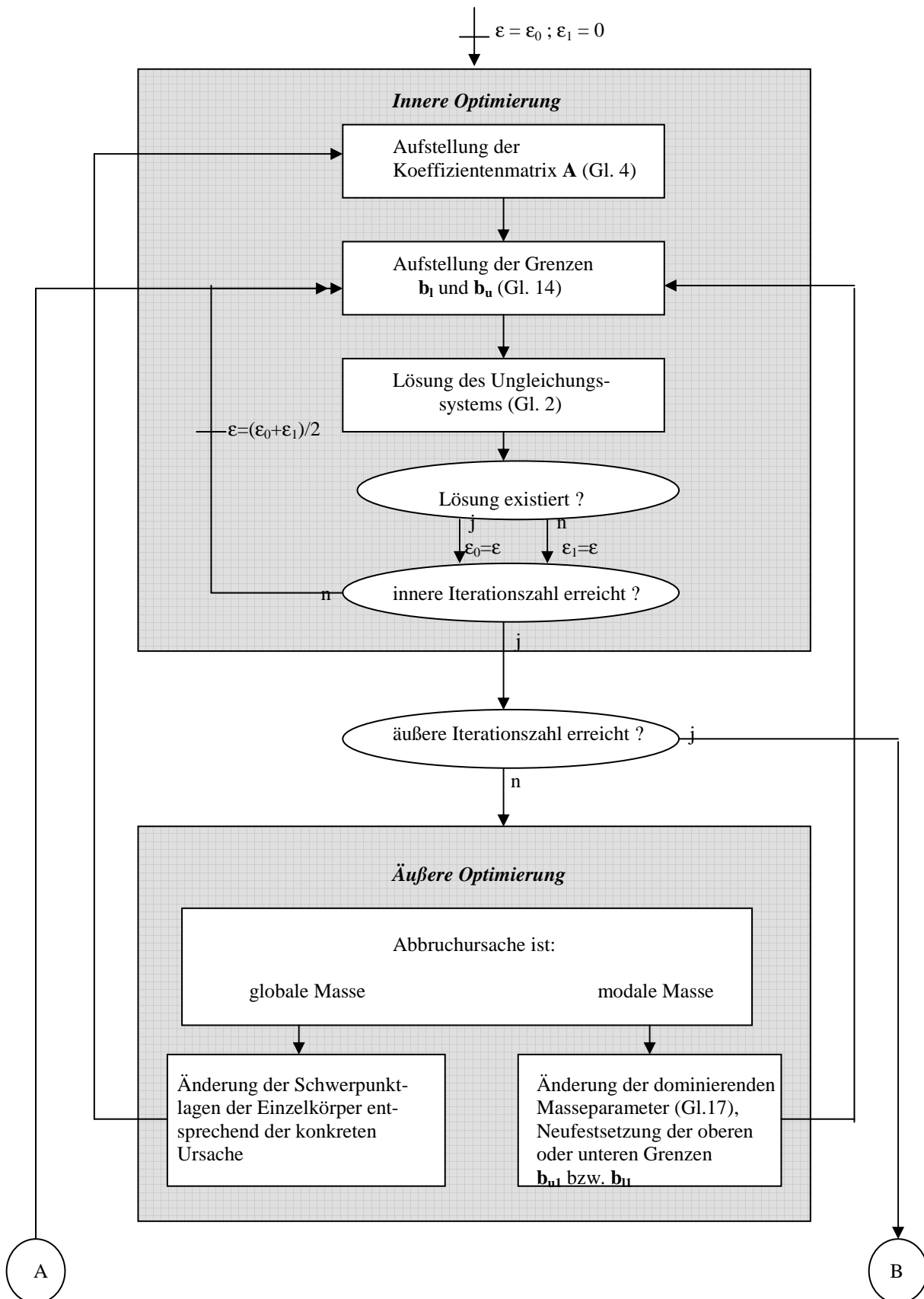
als Elemente des oberen Grenzvektors b_{u1} (Gl. (2)) eingesetzt, bevor eine - mit diesen veränderten Forderungen versehene- erneute Optimierung erfolgt .

Eine analoge Vorgehensweise kann angewandt werden, wenn die oftmals bei der Zeitintegration der Bewegungsgleichungen störenden höchsten Eigenfrequenzen des Ersatzmodelles verringert werden sollen, um eine größere Zeitschrittweite zu ermöglichen. Dann allerdings sind die betreffenden Hauptanteile (Gl.23) der modalen Massen zu erhöhen und als Elemente des unteren Grenzvektors b_{l1} einzusetzen. Grundvoraussetzung hierfür ist, dass bei der Lösung des Eigenwertproblems (Gl.16) alle Eigenwerte und Eigenformen berechnet werden.

5. Das Programm *feMbs*

Das Programm *feMbs* /15/ ist ein unter Windows 95 und aufwärts lauffähiges FORTRAN 90-Programm, das nach den oben beschriebenen Algorithmen Mehrkörper-Ersatzmodelle aus Finite-Elemente-Strukturen generiert. In einer ersten Ausbaustufe wird ANSYS 5.4 /14/ verwendet, um die benötigten FEM-Daten (vgl.Abschnitt 2) zu erzeugen. Die Modellaufbereitung erfolgt automatisch (durch Schreiben der benötigten Batch-Sequenzen) für die Mehrkörper-Tools alaska 3.0 /11/ und alaska 4.0 /13/. Das Programm arbeitet jedoch unabhängig vom jeweiligen FEM- bzw. MKS-Code,

und ist somit (nach geringen Anpassungen) auch als Adapter zwischen anderen FEM- und MKS-Programmen einsetzbar. In der Version 1.1 von *f e M b s* sind die Algorithmen nach Abschnitt 4.2 realisiert worden, Version 2.1 kann zusätzlich die Eliminierung der "unerwünschten" Eigenfrequenzen nach Abschnitt 4.3 ausführen. Der Lösungsalgorithmus wird schematisch in Bild 1 dargestellt, ein Beispiel für ein Ergebnisprotokoll zeigt Bild 2..



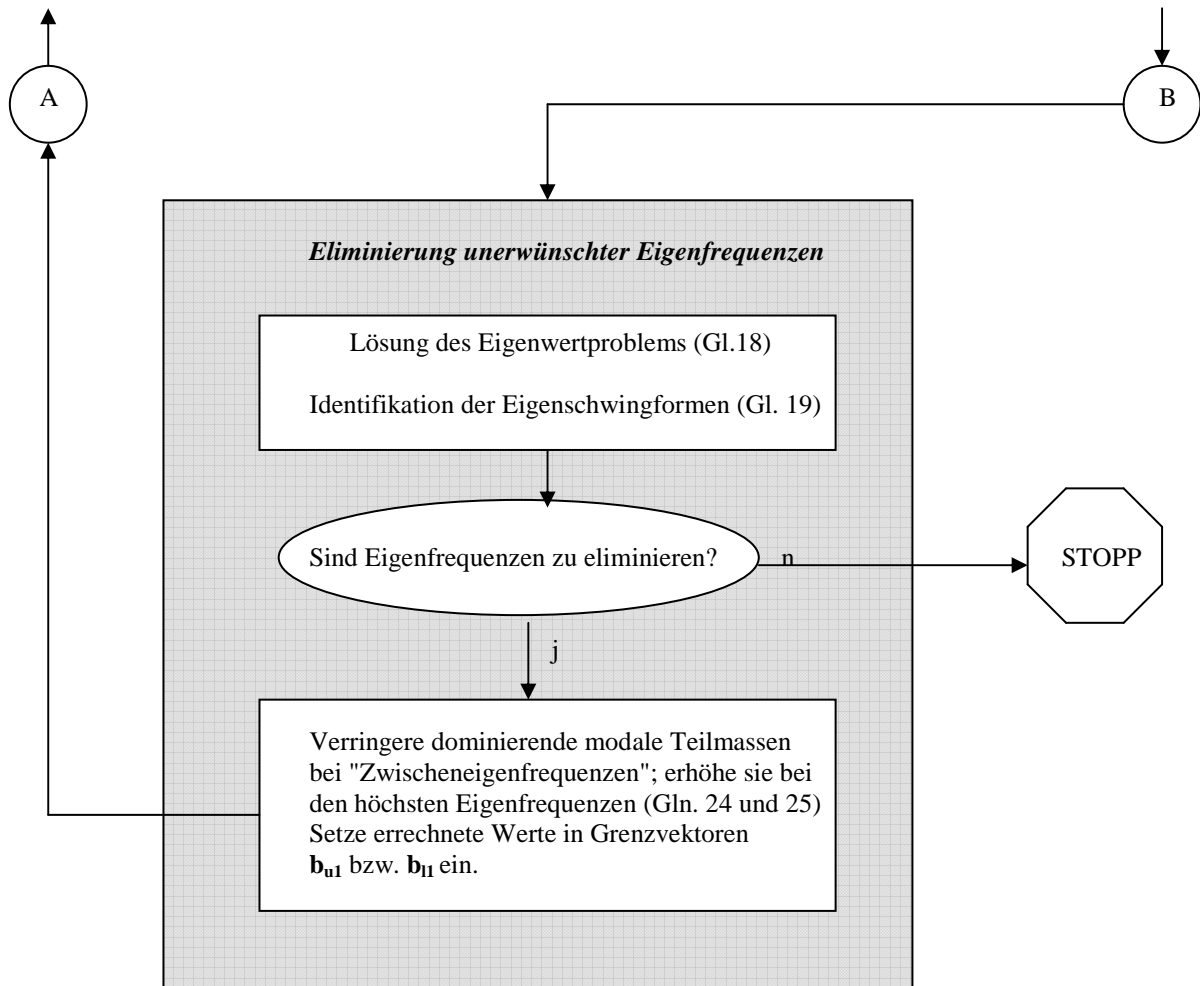


Bild 1: Programmablaufplan von *f e M b s* 2.1

```

f e M b s - Rechnung vom : 13.06.2000 um 11:02:35 Uhr

Programmversion : 1.1 ( 20000930 )
Inputfilename : D:\Users\KlausK\feMbs11\ala4_Bsp\Rahmen\rahneu.fms
Anzahl Massen : 12
Anzahl Eigenvektoren : 4
Art der Rechnung : 2
FEM-Code : Ansys 5.4
MBS-Code : alaska 4.0
Normierung der Modalmatrix : 0
Zielfunktion : 7
Modifikationsparameter : 0
Optimierungsparameter eps (Beginn) : 0.400000000000000
Toleranzparameter Masse : 0.250000000000000
Toleranzparameter Schwerpunktlage : 0.800000000000000
Toleranzparameter MTM : 0.750000000000000
Toleranzparameter Dev.-Momente : 1.000000000000000
Toleranzparameter Eigenfrequenzen : 0.700000000000000
Wert der kleinsten Masse (%) : 0.760000000000000
Abtastparameter : 0.800000000000000
Formparameter : 0.850000000000000
Steifheitsparameter : 0.105000000000000

Optimierungsparameter eps (Ende ) : 9.0368912134455026E-02
Abbruchursache : 3. EF

```

globale Massen			modale Massen		
	Vorgabe	Ergebnis		Vorgabe	Ergebnis
M	10.5230	10.2830	mue (1)	1.0000	0.9878
S_x	0.0000	0.0361	mue (2)	1.0000	0.9051
S_y	0.0000	-0.0021	mue (3)	1.0000	1.0949
S_z	0.0000	0.0361	mue (4)	1.0000	1.0271
J_xx	0.3595	0.3567			
J_yy	0.9233	1.0097			
J_zz	0.7626	0.7072			
J_xy	0.0000	0.0004			
J_xz	0.3223	0.3966			
J_yz	-0.0001	-0.0006			

E r g e b n i s s e :

Koerper	1	2	3	4	5	6
Knoten	1	12	13	19	28	29
m	3.176269	0.124679	0.379970	2.020951	0.079975	0.079975
J_xx	0.000059	0.000807	0.000811	0.000157	0.000146	0.000146
J_yy	0.000050	0.000686	0.000689	0.000134	0.000124	0.000124
J_zz	0.000059	0.000807	0.000811	0.000157	0.000146	0.000146
x_0	0.000000	0.030000	0.000000	0.050748	-0.143680	-0.143680
y_0	0.000000	0.000000	-0.006000	0.000000	-0.121000	0.121000
z_0	0.000000	-0.150000	-0.119150	0.135330	0.302520	0.302520
x	-0.018633	0.008751	-0.018633	0.027690	-0.149787	-0.149787
y	0.000000	0.000000	-0.006000	0.000000	-0.121000	0.121000
z	0.015361	-0.121562	-0.093402	0.138892	0.291506	0.291506
d_x	-0.018633	-0.021249	-0.018633	-0.023058	-0.006107	-0.006107
d_y	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
d_z	0.015361	0.028438	0.025748	0.003562	-0.011014	-0.011014
Koerper	7	8	9	10	11	12
Knoten	39	49	58	76	135	136
m	0.961763	2.913361	0.079975	0.306137	0.079975	0.079975
J_xx	0.000156	0.035629	0.000141	0.000130	0.000125	0.000125
J_yy	0.000132	0.035629	0.000120	0.000110	0.000106	0.000106
J_zz	0.000156	0.041916	0.000141	0.000130	0.000125	0.000125
x_0	-0.365700	-0.598770	-0.544600	-0.347000	0.027693	0.027693
y_0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.117000	-0.117000
z_0	0.290150	0.433260	0.435780	-0.046000	0.196230	0.196230
x	-0.352451	-0.565201	-0.515754	-0.335381	0.006645	0.006645
y	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.117000	-0.117000
z	0.280215	0.410848	0.413148	-0.026629	0.194483	0.194483
d_x	0.013249	0.033569	0.028846	0.011619	-0.021048	-0.021048
d_y	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
d_z	-0.009935	-0.022412	-0.022632	0.019371	-0.001747	-0.001747

(Rueckkehrcode : 0)

Bild 2 : Ergebnisprotokoll *f e M b s* 1.1

6. Berechnungsbeispiele

6.1 Balken

Es soll die Lösungsmethode an dem akademischen Beispiel eines geraden, isotropen, schlanken Balkens getestet werden. Das FE-Modell besteht aus 60 gleichen, geraden Balkenelementen. Die Anzahl der Hauptknoten beträgt 3 bis 5; ihre Verteilung wurde so gewählt, dass sich an den beiden Balkenenden jeweils ein Knoten befindet und die Abschnitte zwischen den benachbarten Knoten gleich groß sind. Bei der Lösung wurde darauf geachtet, dass die Abweichungen in allen globalen Masseparametern kleiner als 5% von den Originalwerten sind. In Tabelle 1 sind die Werte für die niedrigsten vier „Nicht-Null“-Eigenfrequenzen des jeweils ungefestelten Modelles aufgeführt. Zum Vergleich werden gleichartige Berechnungen auch mit den alaska-Superelementen (siehe /11/) herangezogen. Wenn man bedenkt, dass jedes alaska-Superelement intern durch vier Starrkörper modelliert wird, sind die Ergebnisse für die ersten Eigenschwingungen als Kriterium für die Güte der Mehrkörper-Ersatzmodelle überzeugend.

Tabelle 1 : Niedrigste (Biege)-Eigenfrequenzen (in Hz) des ungefestelten Balkens bei verschiedenen Modellierungen

FEM, Kon- tinuum	ANSYS Substruktur-Reduktion Anzahl Hauptknoten			alaska Anzahl Superelemente			<i>f e M b s</i> Anzahl Starrkörper		
	3	4	5	1	2	3	3	4	5
	36.1	36.2	36.2	36.2	50.5	35.9	36.9	30.8	36.5
36.1	36.2	36.2	36.2	50.5	36.0	37.1	30.8	36.6	36.6
99.6	113.3	100.1	99.9	76.4	115.8	97.5	66.2	100.4	99.1
99.6	113.3	100.1	99.9	76.4	115.8	97.5	66.2	100.5	99.1

Aus Bild 3 wird ersichtlich, dass nur über die in Abschnitt 4.3.2 beschriebene äußere Optimierung, d.h. die Verschiebung der Schwerpunktlagen der Einzelkörper gegenüber der jeweiligen Knotenlage (im konkreten Fall nach „innen“) die Annäherung aller globalen und modalen Massen erreicht werden kann.

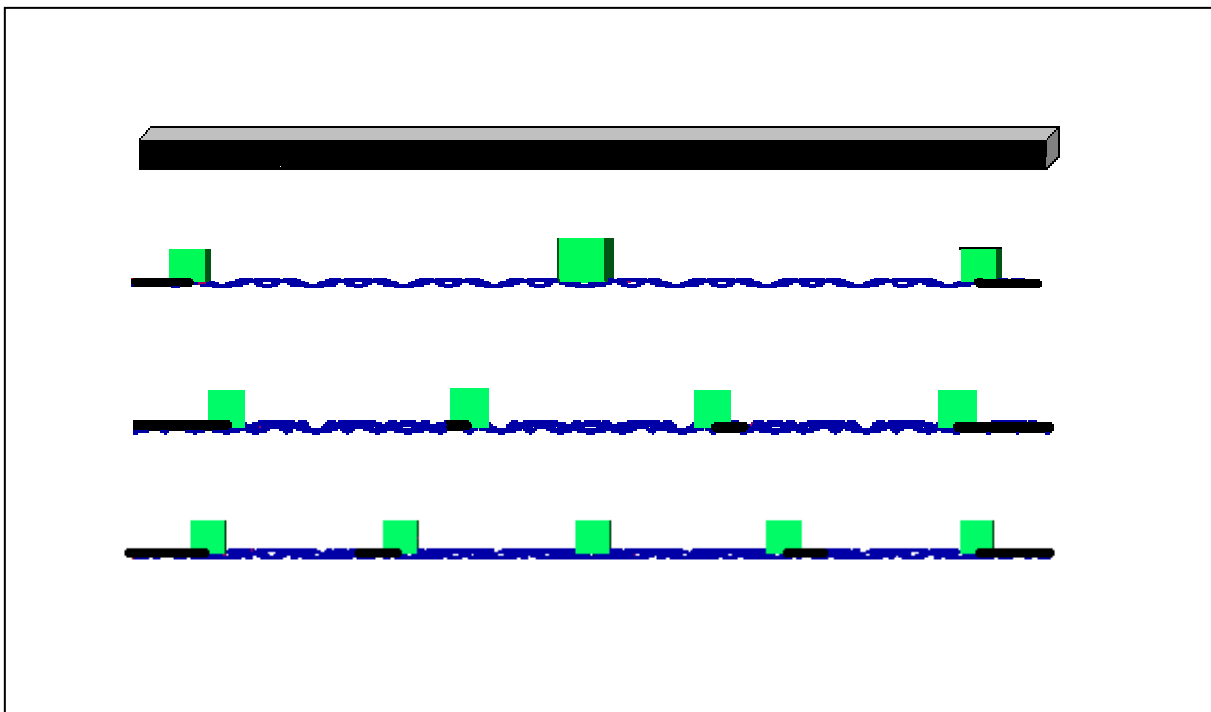


Bild 3: Balken als Kontinuum, 3-, 4- und 5-Massenmodell

6.2 Motorradrahmen

Zur Simulation des Fahrverhalten eines Motorrades soll u.a. der Hauptrahmen als elastisches Bauteil berücksichtigt werden. Die FE-Modellierung (siehe Bild 4) erfolgt mit **ANSYS 5.4**. Es wird eine Modalanalyse der ungesesselten Struktur durchgeführt, anschließend erfolgt die Substruktur-Reduktion. An den Stellen, an denen der Rahmen mit den benachbarten Bauteilen verbunden ist, sind die Hauptknoten vorgesehen (in Bild 4 durch jeweils drei Doppelpfeile gekennzeichnet). Eine Validierung der Substruktur erfolgt, indem Eigenfrequenzen des vollen und des im konkreten Fall auf 12 Knoten reduzierten Modelles verglichen werden. Stimmen hier die interessierenden Größen nicht zufriedenstellend überein, war die Wahl der Lage der Hauptknoten ungünstig oder deren Anzahl war zu gering, und die Substruktur-Reduktion ist zu korrigieren. Anschließend wird die Steifigkeitsmatrix der reduzierten Struktur, die Lage der Hauptknoten im Strukturkoordinatensystem und die benötigten Eigenschwingformen mit den dazugehörigen Frequenzen auf externe Dateien geschrieben.

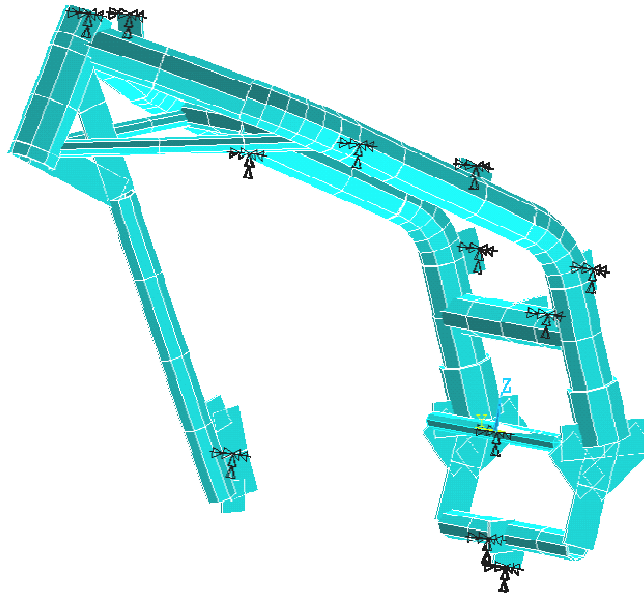


Bild 4: FE-Modell eines Motorradrahmens (mit Hauptknoten)

feMbs übernimmt die FE-Daten und ermittelt durch die oben beschriebene Optimierungsstrategie die gesuchten Masseparameter und die Schwerpunktlagen der Einzelkörper. Danach erfolgt die automatische Aufbereitung des Ersatzmodelles, dessen Parameter in Bild 2 aufgeführt sind und dessen Topologie in Bild 5 zu sehen ist (Starrkörper als Würfel, deren Größe der Masse entspricht, Steifigkeitsmatrix als Federn zwischen allen Starrkörpern), für das Simulationswerkzeug **alaska**.

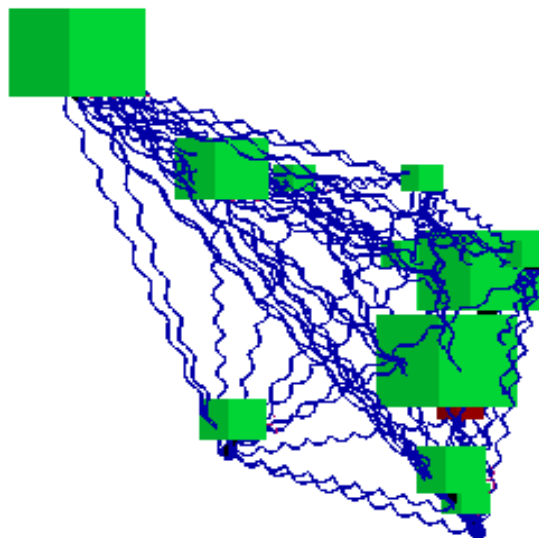


Bild 5 : Automatisch erstelltes Mehrkörper-Ersatzmodell des Motorradrahmens für alaska3.0 /11/

Ein Vergleich der Eigenschwingungen des ungefestelten Modelles für die unterschiedlichen Modellierungsstufen ist in Tabelle 2 aufgeführt. Die Zuordnung der Eigenfrequenzen erfolgte ebenfalls durch den visuellen Vergleich der Eigenschwingformen (*f e M b s* 1.1).

Tabelle 2 : Vergleich der ersten vier „Nicht-Null“-Eigenfrequenzen (in Hz) des Motorrad-Rahmens bei unterschiedlichen Modellierungsstufen

FE-Modell		MKS-Ersatzmodell
voll	reduziert	
89.6	89.8	93.4
96.4	96.4	101.5
178.0	178.5	161.3
214.4	218.0	209.3

Es ist eine - den Ansprüchen des Ingenieurs genügende- Übereinstimmung in den Frequenzen zu erkennen, so dass dieses Rahmen-Ersatzmodell in das Motorrad-Gesamtmodell eingebettet werden kann. Die höheren Eigenfrequenzen sind mit Starrkörpermodellen verständlicherweise schwerer nachzubilden

Im Allgemeinen sind die Eigenschwingungen der ungefestelten Struktur am schwierigsten anzunähern (gegenüber anderen Randbedingungen), weil alle Teilmassen an den Schwingungen beteiligt sind. Die Erfahrungen besagen, wenn diese Eigenschwingungen übereinstimmen, stimmen auch diejenigen bei anderen Lagerungen.

7 Zusammenfassung

Es wird eine Methode vorgestellt, die es ermöglicht, aus Finite-Elemente-Strukturen traditionelle Mehrkörpermodelle zu erstellen, die annähernd die gleichen starrkörperdynamischen, elastischen und strukturdynamischen Eigenschaften wie die Ausgangsstruktur besitzen. Die FE-Struktur wird einer Substruktur-Reduktion unterzogen, an den Stellen der dabei definierten Hauptknoten werden im zu generierenden Mehrkörpermodell starre Einzelkörper angeordnet, und die Masseparameter dieser Starrkörper werden mittels linearer Optimierung unter linearen Restriktionen berechnet.

8 Literatur

- /1/ Wolf, C.-D., Hendel, K. u.a.: Entwicklung innovativer Methoden zur betriebsfesten Auslegung von Motorradtragkonstruktionen in Leichtbauweise, Abschlussbericht Motorrad-Gesamtsimulation MOTOSIM, Institut für Mechatronik, Chemnitz, 2000
- /2/ Argyris, J.: An Excursion into Large Rotation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 32, pp.85-155, 1982
- /3/ Rauh, J.: Ein Beitrag zur Modellierung elastischer Balkensysteme, VDI-Fortschrittsberichte, R.18, Düsseldorf, 1987
- /4/ Balasa, B., Sacagin, M. u.a.: MBS-FEM model of a simple whole bus, computer simulation, deliverable 22/1, Project copernicus No. CP94-0520, INAS, CRAIOVA (ROM), 1996
- /5/ Hendel, K., Pham, A.T.: Modelling and Simulation of the Bus IKARUS398 with the elastic Superstructure, Project copernicus No. CP94-0520, Institut für Mechatronik, Chemnitz, 1996
- /6/ Maisser, P.: Dynamik hybrider Mehrkörpersysteme aus kontinuumsmechanischer Sicht, ZAMM 76, S.15-33, 1996
- /7/ Óttarsson, G.: Aufsatz..... ZAMM 1, 12.4.1996

- /8/ Brandenberger, U.: Simulation von elastischen Mehrkörpersystemen durch Kopplung des MKS-Programmes ADAMS mit dem FEA-Programm ANSYS, Vortrag zur Tagung „Verbindung von MKS mit FEM-Modellen“, Haus der Technik Essen, 1997
- /9/ ADAMS/Finite Element Analysis, Reference Manual, V.8.0, Mechanical Dynamics Inc., Ann Arbor, Michigan, 1994
- /10/ Guyan, R.J.: Reduction of Stiffness and Mass Matrices, AIAA-Journal, Vol.3, Nr.2, 1965
- /11/ alaska-Benutzerhandbuch, Institut für Mechatronik, Chemnitz, 1995
- /12/ Holzweißig, F., Dresig, H.: Lehrbuch der Maschinendynamik, Fachbuchverlag Leipzig-Köln, 1994
- /13/ alaska4-Benutzerhandbuch, Institut für Mechatronik, Chemnitz 2000
- /14/ ANSYS-Benutzerhandbuch , Revision 5.0, CAD-FEM GmbH. Gräding, 1994
- /15/ Kaltofen, K.: Dokumentation zum Programm *f e M b s* , Institut für Mechatronik, Chemnitz, 2000