



IFToMM

VII. INTERNATIONAL CONGRESS ON THE THEORY  
OF MACHINES AND MECHANISMS

SEPTEMBER 1996 - LIBEREC, CZECH REPUBLIC

TECHNICAL UNIVERSITY OF LIBEREC  
DEPARTMENT OF TEXTILE MACHINE DESIGN

## ZUR DYNAMIK SPIELBEHAFTETER PERIODISCHER ANTRIEBE

KLAUS KALTOFEN

Institut für Mechanik, Lehrstuhl Maschinendynamik / Schwingungslehre  
Technische Universität Chemnitz-Zwickau  
D-09107 Chemnitz

### Einleitung

Ungleichmäßig übersetzende, schnellaufende Mechanismen verursachen eine Reihe unerwünschter Schwingungserscheinungen, die mit den üblichen Analysemethoden (Kinematik und Kinetostatik der starren Maschine) nicht behandelt werden können. Ein solches dynamisches Problem erwächst aus dem funktions- und fertigungsbedingten Auftreten von Gelenkspiel, z.B. in Räderantrieben (Verdrehflankenspiel), Kurven- oder Koppelgetrieben.

Einerseits sind vor allem aus dem Fahrzeugbau Untersuchungen zu Spiel-Stoßerscheinungen bekannt /1,2/, bei denen infolge vieler Spielstellen recht komplexe Modelle von Mehrkörpersystemen benutzt werden müssen, um die realen Schwingungserscheinungen (Getrieberasseln, Hämmern) adäquat abzubilden.

In Verarbeitungsmaschinen hingegen werden oft massereiche, ausgedehnte und elastische Arbeitsorgane von einem Mechanismus bewegt. Zur Beschreibung der dynamischen Wirkung von Spiel in diesen Antrieben wird häufig ein Minimalmodell verwendet, bei welchem ein starrer, spielbehafteter Antrieb eine elastisch angekoppelte Masse bewegt, vgl. /3,4,5,6/. Mit diesem Modell wird jedoch nicht berücksichtigt, daß das Arbeitsorgan selbst auch während des Spieldurchlaufes schwingen kann.

In /7/ benutzt VULFSON ein Berechnungsmodell mit einem - auch während des Spieldurchlaufes - schwingungsfähigen Arbeitsorgan und leitet hierfür ein Kriterium für das Vermeiden von Mehrfachstößen beim Spieldurchlauf ab. Er geht jedoch davon aus, daß die Periodendauer der Eigenschwingung des Arbeitsorganes sehr groß gegenüber der Spieldurchlaufzeit ist und vernachlässigt demzufolge diese Schwingungen.

Im folgenden wird ein Antriebssystem untersucht, welches aus einem periodisch arbeitenden Antriebsmechanismus und einem elastischen Abtriebs- bzw. Arbeitsorgan besteht. Zwischen Antrieb und Arbeitsorgan tritt Spiel auf.

Es wird ein starrer Antrieb vorausgesetzt, der im stationären Betriebszustand die - zumindest periodische Anteile enthaltende - Abtriebsfunktion  $U(\Omega t)$  (Antriebswinkelgeschwindigkeit  $\Omega = konst.$ ) erzeugt. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß lediglich Trägheitsbelastung vorliegen soll. Diese Annahme ist im allgemeinen umso berechtigter, je größer die Antriebswinkelgeschwindigkeit  $\Omega$  ist.

## Berechnungsmodell, Bewegungsgleichungen

Mit dem Berechnungsmodell soll der physikalische Sachverhalt berücksichtigt werden, daß das elastische Arbeitsorgan vor und (bedingt) nach dem Spieldurchlauf an den starren Antrieb gefesselt ist und während des Spieldurchlaufes ungefesselt frei schwingen kann. Diese Forderungen können mit dem in Bild 1 dargestellten Minimalmodell mit wechselnden Randbedingungen erfüllt werden.

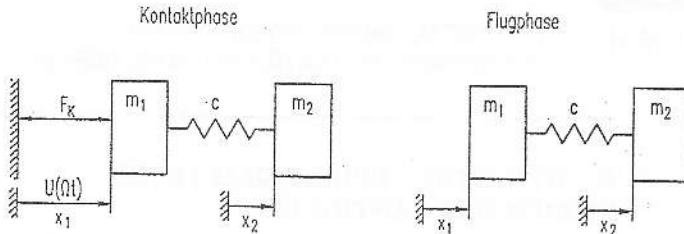


Bild 1: Berechnungsmodell

Für die Kontaktphase ( $t < t_0$ ) gelten die Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{x}_1 + c \cdot (x_1 - x_2) = F_K \quad (1a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c \cdot (x_2 - x_1) = 0 \quad (1b)$$

wobei  $F_K$  die Kontaktkraft zwischen Antrieb und elastischem Arbeitsorgan darstellt.

Mit der Auslenkungsdifferenz  $q_2 = x_2 - x_1 = x_2 - U$  folgt aus Gl. (1b)

$$\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = -\ddot{U} = -\Omega^2 \cdot U'' \quad (2)$$

Dabei ist  $\omega = \sqrt{c/m_2}$  die Eigenkreisfrequenz des gefesselten Modells, und  $U''$  die zweite Ableitung der Antriebsfunktion  $U$  nach der Antriebskoordinate  $\varphi = \Omega t$ .

Unter der Voraussetzung, daß  $U(t)$  langsam veränderlich ist, ergibt sich als partikuläre, stationäre Lösung von Gl. (2) die kinetoelastische Auslenkung  $q_{2e}$ .

$$q_{2e} = -\eta^2 \cdot U'' \quad \text{und} \quad \dot{q}_{2e} = -\eta^2 \cdot \Omega \cdot U''' \quad (3a,b)$$

mit dem Abstimmungsverhältnis  $\eta = \Omega/\omega$ .

Das Ablösen der Masse  $m_1$  vom Antrieb erfolgt zum Zeitpunkt  $t = t_0 = 0$ . Die Bedingung hierfür lautet: Vorzeichenwechsel der Kontaktkraft  $F_K$  (vgl. Gl. (1a)). Dies tritt im dämpfungs-freien Fall dann ein, wenn gilt  $\ddot{U}(t_0) = \ddot{U}_0 = 0$ .

Die Bewegungsgleichungen des nunmehr ungefesselten Systems ergeben sich zu:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c \cdot (x_1 - x_2) = 0 \quad (4a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c \cdot (x_2 - x_1) = 0 \quad (4b)$$

Aus den Auslenkungen  $x_1$  und  $x_2$  lassen sich die "großen" kinematischen Anteile eliminieren:

$$x_{1/2} = \dot{U}_0 \cdot (t - t_0) + q_{1/2} \quad (5)$$

und es folgen die Gleichungen für die dynamischen Zusatzauslenkungen  $q_1$  und  $q_2$ :

$$m_1 \ddot{q}_1 + c \cdot (q_1 - q_2) = 0 \quad (6a)$$

$$m_2 \ddot{q}_2 + c \cdot (q_2 - q_1) = 0 \quad (6b)$$

Die Eigenkreisfrequenzen ergeben sich zu  $\omega_1 = 0$  und  $\omega_2 = \sqrt{c \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}}$ . (7)

Mit dem Massenverhältnis  $\mu = \frac{m_1}{m_2}$  folgt hieraus die Beziehung  $\omega_2^2 = \frac{\mu + 1}{\mu} \cdot \omega^2$ . (8)

Die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt  $t = t_0 = 0$  werden durch den kinetoelastischen Deformationszustand bestimmt und lauten:

$$q_{10} = q_1(t_0 = 0) = 0 \quad \dot{q}_{10} = \dot{q}_1(t_0 = 0) = 0 \quad (9a)$$

$$q_{20} = q_2(t_0 = 0) = -U_0'' \cdot \eta^2 = 0 \quad \dot{q}_{20} = \dot{q}_2(t_0 = 0) = -U_0''' \cdot \eta^2 \cdot \Omega \quad (9b)$$

Die dynamischen Auslenkungen  $q_1$  und  $q_2$  ergeben sich unter Zuhilfenahme der Beziehung (8)

zu

$$q_1(t) = -\frac{U_0'''' \cdot \eta^3}{\mu + 1} \cdot \left[ \omega t - \sqrt{\frac{\mu}{\mu + 1}} \cdot \sin \left( \sqrt{\frac{\mu + 1}{\mu}} \cdot \omega t \right) \right] \quad (10a)$$

$$q_2(t) = -\frac{U_0'''' \cdot \eta^3}{\mu + 1} \cdot \left[ \omega t + \mu \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\mu + 1}} \cdot \sin \left( \sqrt{\frac{\mu + 1}{\mu}} \cdot \omega t \right) \right] \quad (10b)$$

und setzen sich aus einer gleichförmigen Bewegung (Starrkörperverschiebung) und einem Schwingungsanteil zusammen.

### Spieldurchlaufzeit

Der Spieldurchlauf sei zum Zeitpunkt  $t = t_1 > t_0$  beendet. Dieser ist erreicht, wenn gilt (vgl. Bild 2):

$$\dot{U}_0 t_1 + q_1(t_1) = s + U_1 - U_0 \quad (12)$$

Hierbei ist  $s$  die Spielgröße zum Zeitpunkt  $t_1$ . Mit der Näherung

$$U_1 = U(t_1) \approx U_0 + \dot{U}_0 \cdot t_1 + \frac{\ddot{U}_0}{2} \cdot t_1^2 + \frac{\ddot{\ddot{U}}_0}{6} \cdot t_1^3 \quad (13)$$

folgt wegen  $\ddot{U}_0 = 0$  aus Gl. (12)

$$q_{11} = q_1(t_1) = s + \frac{\ddot{\ddot{U}}_0}{6} \cdot t_1^3 \quad (14)$$

und nach Einführung der dimensionslosen Zeit  $\tau = \omega \cdot t$  daraus die Gleichung für die Spieldurchlaufzeit  $\tau_1 = \omega t_1$

$$\tau_1^3 - 6K + \frac{6}{\mu + 1} \cdot \left[ \tau_1 - \sqrt{\frac{\mu}{\mu + 1}} \sin \left( \sqrt{\frac{\mu + 1}{\mu}} \tau_1 \right) \right] = 0 \quad (15)$$

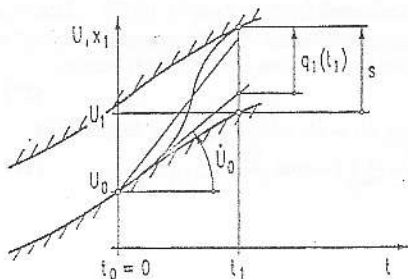


Bild 2 : Zur Ermittlung der Spieldurchlaufzeit

Hierbei stellt  $K$  einen "dynamischen Spielparameter" dar, der sich aus

$$K = \frac{-s}{U_0'''' \cdot \eta^3} \quad (16)$$

ergibt und in dem kinematische und dynamische Eigenschaften des Antriebssystems zusammengefaßt werden. Er hat neben dem Massenverhältnis  $\mu$  bedeutenden Einfluß auf das dynamische Verhalten des Modells. In Bild 3 sind als Lösungen der transzendenten Gl. (15) die Verläufe der Spieldurchlaufzeiten  $\tau_1$  in Abhängigkeit von  $K$  für einige Massenverhältnisse  $\mu$  dargestellt.

Die Lösung für  $\mu \rightarrow \infty$  erhält man bei Anwendung der z.B. in /5/ angegebenen Gleichungen. Die in /6/ aufgeführten Beziehungen, bei denen zusätzlich die kinetoclastischen Deformationen berücksichtigt werden, führen auf die Lösung für  $\mu = 0$ .

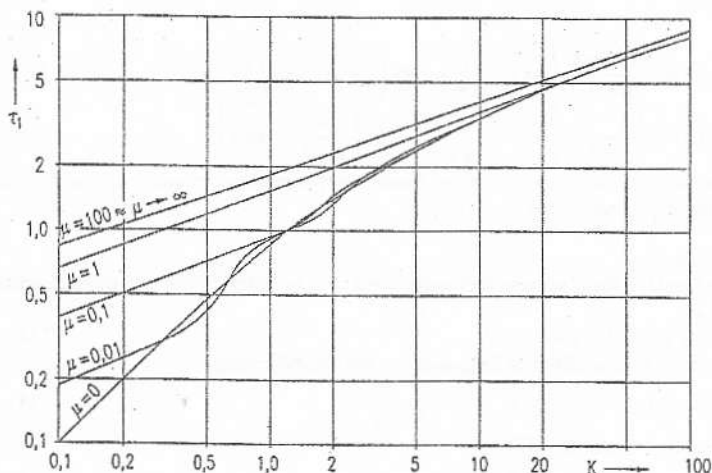


Bild 3: Spieldurchlaufzeiten für verschiedene Modellparameter  $K$  und  $\mu$

#### Dynamik nach dem Spieldurchlauf

Mit Beendigung des Spieldurchlaufes ( $t = t_1$ ,  $t^* = 0$ ) gelten wieder die Bewegungsgleichungen (1) für das gefesselte Modell, solange die Bedingung für die Fesselung gegeben ist. Die Erregerfunktion (vgl. Bild 4) besteht aus einem Stoß- und einem Sprunganteil sowie dem sich anschließenden linearen Verlauf. Der Stoßanteil  $\ddot{U}_1(t^*) = I \cdot \delta(t^*)$ , ( $\delta(t^*)$  ... DIRACsche  $\delta$ -Funktion) ergibt sich aus der Geschwindigkeitsdifferenz von "Programmbewegung" und Bewegung der Masse  $m$ , zum Auftreffzeitpunkt  $t^* = 0$ . Die Stoßintensität beträgt

$$I = \dot{U}_1 - [\dot{U}_0 + \dot{q}_1(t_1)] \quad (17)$$

und unter Beachtung der Reihenentwicklung  $\dot{U}_1 = \dot{U}_0 + \ddot{U}_0 t_1 + \frac{1}{2} \ddot{U}_0 t_1^2$  folgt daraus

$$I = \frac{1}{2} \ddot{U}_0 t_1^2 - \dot{q}_1(t_1) = U_0''' \eta^2 \Omega \cdot \left[ \frac{\tau_1^2}{2} + \frac{1}{\mu+1} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu}} \tau_1 \right) \right) \right] \quad (18)$$

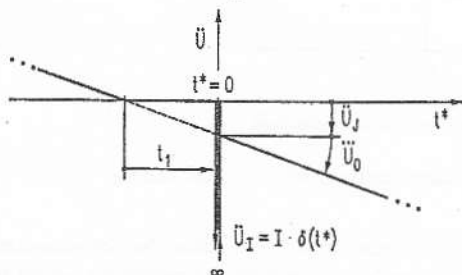


Bild 4: Erregerfunktion  $\ddot{U}(t^*)$

Die gesamte Erregerfunktion  $\ddot{U}(\tau^*)$  lautet mit  $\tau^* = \omega \cdot t^*$ :

$$\ddot{U}(\tau^*) = U_0''' \eta^3 \cdot \left\{ \left[ \frac{\tau_1^2}{2} + \frac{1}{\mu+1} \cdot \left( 1 - \cos \left\langle \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu}} \cdot \tau_1 \right\rangle \right) \right] \cdot \delta(\tau^*) + \omega^2 \cdot (\tau^* + \tau_1) \right\} \quad (19)$$

Die Anfangsbedingungen ergeben sich aus den Weg- bzw. Geschwindigkeitsdifferenzen:

$$q_{20} = q_2(t^* = 0) - q_1(t^* = 0) = -U_0''' \cdot \eta^3 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\mu+1}} \cdot \sin \left( \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu}} \tau_1 \right), \quad (20a)$$

$$\dot{q}_{20} = \dot{q}_2(t^* = 0) - \dot{q}_1(t^* = 0) = -U_0''' \cdot \eta^2 \cdot \Omega \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{\mu+1}{\mu}} \cdot \tau_1\right) \quad (20b)$$

Somit kann die Bewegungsgleichung (2) gelöst werden. Bezieht man die Auslenkung  $q_2$  auf die Spielgröße  $s$ , folgt:

$$q_2^* = \frac{q_2}{s} = \frac{1}{K} \cdot (\tau^* + \tau_1 + A \cdot \sin \tau^* + B \cdot \cos \tau^*), \quad (21)$$

mit 
$$A = \frac{\tau_1^2}{2} - \frac{\mu}{\mu+1} \cdot \left[ 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{\mu+1}{\mu}} \cdot \tau_1\right) \right] \quad (22)$$

und 
$$B = -\tau_1 + \sqrt{\frac{\mu}{\mu+1}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{\mu+1}{\mu}} \cdot \tau_1\right) \quad (23)$$

Für die Amplituden des dynamischen Anteils von  $q_2^*$  gilt:

$$\hat{q}_2^* = \frac{1}{K} \sqrt{A^2 + B^2} \leq 1 \quad \forall K, \mu \quad (24)$$

Als weitere Größe ist die Antriebsbelastung, d.h. der Kontaktkraftverlauf  $F_{K'}(\tau^*)$  von Interesse. Aus Gl. (1a) ergibt sich unter Einbeziehung von Gl. (19):

$$F_{K'}(\tau^*) = m_1 \cdot \{(\omega \cdot I) \cdot \delta(\tau^*) + U_0''' \eta \Omega^2 \cdot (\tau_1 + \tau^*)\} - c \cdot q_2(\tau^*) \quad (25)$$

Der Stoßanteil lautet, bezogen auf die Größe  $(c \cdot s)$ :

$$F_{K'}^*(\tau^*) = \frac{m_1 \cdot \omega}{c \cdot s} \cdot I \cdot \delta(\tau^*) = -\frac{\mu}{K} \cdot \left[ \frac{\tau_1^2}{2} + \frac{1}{\mu+1} \cdot \left( 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{\mu+1}{\mu}} \cdot \tau_1\right) \right) \right] \cdot \delta(\tau^*) \quad (26)$$

und ist hauptverantwortlich für die Geräuschenstehung in der Realstruktur.

Zur Verbesserung des Geräuschverhaltens ist ebenfalls anzustreben, Mehrfachstöße zu vermeiden. Wenn es innerhalb der ersten Eigenschwingungsperiode zu einem Vorzeichenwechsel im Kontaktkraftverlauf  $F_{K'}(\tau^*)$  kommt, tritt Wiederablösen der Masse  $m_1$  auf, was vermieden werden sollte.

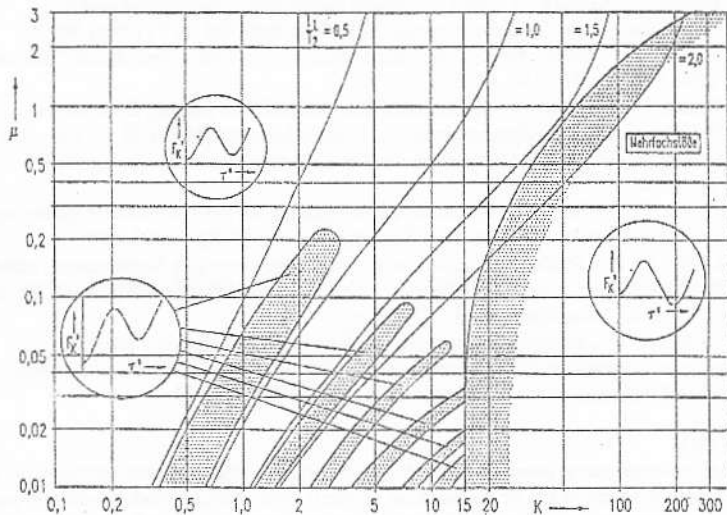


Bild 5: "Stabilitätskarte" zum Auftreten von Mehrfachstößen beim Spieldurchlauf (gepunktete Bereiche: Mehrfachstöße möglich)

In Bild 5 wird eine "Stabilitätskarte" dargestellt, in der die Bereiche von  $K$  und  $\mu$  aufgezeichnet sind, bei denen Wiederablösen auftritt oder vermieden wird. Es gibt zwei Möglichkeiten

des Wiederablöses:

1. Im Bereich kleiner  $\mu$ - und  $K$ -Werte kann es unmittelbar nach dem Stoß infolge großer Anfangswegdifferenzen  $q_{20}$  (Gl. (20a)) zum Ablösen von  $m_1$  kommen (Sofortablösen).
2. Im Bereich größerer  $K$ -Werte ( $K \geq 15$ ) kann es infolge der längeren Spieldurchlaufzeit  $\tau$ , und dem damit verbundenen großen Geschwindigkeitssprung zum Ablösen innerhalb der ersten Eigenschwingungsperiode kommen (elastischer Stoß).

### Schlussfolgerungen

Will man den negativen dynamischen Wirkungen von Spiel in zyklischen Antriebssystemen begegnen, stehen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung:

1. Benützung von möglichst "spielresistenten" Abtriebsfunktionen  $U(\Omega t)$ , d.h. die Anzahl der Spielstellen ist auf ein Minimum zu beschränken, (z.B. kein "Durchschwingen" während einer Rastphase), die Zeitpunkte der Spieldurchläufe sind möglichst weit auseinander zu legen und die Werte der Ruckfunktion  $U''(\Omega t)$  an den Spielstellen sollen möglichst gleich groß sein (bei gleichbleibender Spielgröße  $s$ ).
2. Abstimmung der dynamischen Eigenschaften ( $\omega, \omega_s$ ) des elastischen Arbeitsorganes auf die kinematischen Antriebsparameter, so daß
  - keine Mehrfachstöße auftreten (Bild 5),
  - geringe Stoßbelastungen auf den Antrieb zurückwirken (Gl. (26)),
  - die dynamischen Belastungsüberhöhungen konstruktiv beherrschbar sind,
  - die dynamischen Zusatzauslenkungen  $q_2$  technologisch akzeptabel sind.

Insbesondere die Forderung nach Vermeiden von Mehrfachstößen ( $K \leq 15$ ) stellt eine Begrenzung der Eigenfrequenzen nach oben dar.

### Literatur

- /1/ Pfeiffer, F.; Küçükay, F.: Eine erweiterte mechanische Stoßtheorie und ihre Anwendung in der Getriebedynamik. VDI-Zeitschrift, Bd. 127 (1985), Nr. 9
- /2/ Pecken, H.; Troeder, Ch.; Tooten, K.: Belastung von Zahnrädern durch "Hämmern", VDI-Berichte, Nr. 488, 1983
- /3/ Dresig, H.; Vulfson, J.I.: Maßnahmen und Beispiele zur Lösung dynamischer Probleme bei Verarbeitungsmaschinen, Konstruktion 42 (1990), H. S. 369 - 376
- /4/ Dresig, H.; Vulfson, J.I.: Dynamik der Mechanismen, Springer-Verlag Wien - New York, 1989
- /5/ Dresig, H.; Vulfson, J.I.: Kriterien zur Bewertung des dynamischen Einflusses von Spiel in zyklischen Mechanismen, Konstruktion 45 (1993), S. 351-357
- /6/ Lüder, R.: Zur Synthese periodischer Bewegungsgesetze von Mechanismen unter Berücksichtigung von Elastizität und Spiel, VDI-Fortschrittberichte, R.11, Nr. 225, VDI-Verlag Düsseldorf, 1995
- /7/ Vulfson, J.I.: Ustranenie povtornykh soudarenii pri perekładkie v satorach ziklovo mehanizma (Beseitigung wiederholter Stöße bei Spielumkehr in zyklischen Mechanismen), Maschinostroenia, 12, 1989, S. 62 - 67

### SUMMARY

This paper presents investigations of driving systems with clearance between the drive and the elastic working organ of the machine. There is used a simple model with two masses and changing boundary conditions which takes into consideration the vibrations of the working organ during the passage of the clearance. A "dynamical clearance parameter" is created. The results are the time of the clearance passage, the dynamical deformation of the working organ, the impact load and the dynamical load to the drive and a criterion to avoid multiple impacts.